

Введение

Что это пролог или надпись на колеске?

Вильям Шекспир

Эта книга о тензорах, но не только о них. Еще никому не удавалось написать книгу только о тензорах, потому что "тензор" – это общее название для векторов, линейных операторов и даже для скаляров. В книгах о тензорах, по необходимости, приходится говорить об этом всем и еще, обычно, о матрицах, поскольку тензоры удобно представлять в матричной форме. Поразмыслив над этой проблемой, мы решили, что будем писать просто о векторах, как о самых понятных тензорах, вводя постепенно и естественно, в связи с решаемыми задачами, все необходимые атрибуты тензорной алгебры. И только в конце книги мы приходим к общему определению тензора. И в тот момент, когда мы это определение даем, оказывается, что все, что хотелось бы сказать о тензорах в книге для начинающих, уже сказано раньше.

Тензоры широко применяются в дифференциальной геометрии, теории относительности, механике, электродинамике и других областях науки. В последнее время предпринимаются попытки использовать теорию тензоров в экономических науках. Интерес к теории тензоров возник в связи с работами А. Эйнштейна по общей теории относительности и не угасает уже почти сто лет. Конечно, за такое время было написано достаточно хороших книг по этой теории. Есть книги для самых начинающих, и для продвинутых, и для продолжающих, а глас вопиющего: "ну объясните же в конце концов, что такое тензор, и как его можно представить", – не умолкает.

Наша книга предназначена для тех, кто еще не знает, что такое тензор, но по каким-то причинам хочет это узнать. Мы стремились более объяснять, чем доказывать; постепенно и не спеша, подходить к понятиям и их определениям, нежели с них начинать. Следовательно, эта книга скорее для будущих инженеров и физиков, нежели для математиков.

Объектом внимания физиков и инженеров является природа, а не умозрительные построения, и, поэтому, формализм и строгость в рассуждениях – неперенные атрибуты любой книги по математике – не являются для них самоцелью. Они всего лишь средство, которое используется ровно в той степени, в которой это бывает необходимо для правильного понимания природы. Выразив свойства физических или технических объектов при помощи математических понятий, физик и инженер наделяют эти понятия более богатым содержанием, по сравнению с их математическими определениями. В математике это недопустимо, в физике и технике иначе просто не бывает.

Мы стремились сделать эту книгу полезной прежде всего для будущих инженеров и физиков. Насколько нам удалось, судить Вам, Читатель.

25.01.2008 *Автор*

Векторы

Физическая наука изучает строение и свойства неживой природы. Объектами внимания физических теорий являются физические системы, явления или процессы. Количественные характеристики свойств физических объектов называются физическими величинами. Физические величины обладают различным уровнем сложности. Простые физические величины могут быть заданы числовым значением и называются скалярными. Примерами скалярных величин являются температура, масса, объем, площадь, длина, плотность и т.д.

Сложные физические величины не могут быть заданы одним числовым значением. Например, для того, чтобы определить такие величины как сила, скорость, ускорение нам необходимо задать по три числовых значения для каждой величины. Эти величины и аналогичные им мы называем векторными.

Векторные величины весьма разнообразны. Кроме силы, скорости и ускорения, о которых мы уже упомянули, к векторным величинам относятся перемещение, импульс силы, импульс тела, угловая скорость и ускорение, момент силы и момент импульса и многие другие.

Сконцентрировав внимание на наиболее общих свойствах, присущих всем без исключения векторным величинам безотносительно к их физической и геометрической природе, мы приходим к понятию вектора. Теория векторов, как отвлеченных идеальных объектов, является разделом математики.

Скалярные и векторные величины не исчерпывают всего многообразия величин, которые необходимы современной науке. В чем-то родственными векторам, но в общем случае более сложными являются тензорные величины. Примерами тензорных величин являются напряженное состояние в точке, упругость твердого тела, момент инерции, диэлектрическая проницаемость... Для определения таких величин необходимо задать целую таблицу числовых значений. Абстрагируясь от конкретного физического и геометрического содержания таких величин, мы приходим к понятию тензора. Тензор, как и вектор, является математическим понятием и предметом изучения тензорной и векторной алгебры. Понятие тензора настолько крепко связано с идеями векторной алгебры, что, допустив однажды в теорию векторные величины, мы были обречены, в конце концов, прийти к тензорам. Открыв для себя тензоры, мы обнаружили, что все физические величины, так или иначе, являются тензорными, даже самые привычные из них. А мы, постоянно пользуясь ими, даже и не догадывались об этом. Это открытие можно сравнить разве что с открытием господина Журдена из знаменитой комедии Мольера, который был потрясен, когда узнал, что более сорока лет говорит прозой, не подозревая об этом.

Векторная и тензорная алгебры очень тесно связаны. Тензорная алгебра, являясь непосредственным развитием и обобщением векторной, включает ее в себя как важный частный случай. Векторная алгебра, став частью тензорной, серьезно изменила свой облик за счет появления новых выразительных средств. К тому же в ней пришлось изменить некоторые акценты. Поэтому изучение тензорной алгебры логично и удобно начинать с самого начала – с векторов. К тензорам мы придем постепенно, сделав при этом экскурсы в теорию матриц и рассмотрев некоторые содержательные примеры.

.Геометрическое определение вектора

Вектор традиционно определяется как направленный отрезок [1, 9, 12,14]. Например, А.Н. Рублев дает такое определение:

"Вектор представляет собой **геометрический объект**, характеризуемый **длиной и направлением**" [14, с. 88].

Это определение фокусирует внимание на двух, несомненно важных свойствах всех физических векторных величин, – они все характеризуются некоторым количественным значением, которое отождествляется с длиной отрезка, и направлением в пространстве. При своих несомненных достоинствах – простота и наглядность – это определение не отражает в полной мере существа понятия "вектор".

Во-первых, у физических и геометрических объектов можно обнаружить немало свойств, которые характеризуются величиной и направлением, но, тем не менее, не являющихся векторными. Например, положение транспортных средств на карте города можно показать при помощи направленных отрезков, связав их длину с длиной транспортного средства. Такие направленные отрезки будут в целом правильно отражать движение транспортных потоков, но для них нельзя разумным образом ввести традиционные для векторной алгебры алгебраические операции.

Еще один пример. Для того, чтобы однозначно задать величину и направление поворота твердого тела, можно воспользоваться направленным отрезком. Для этого достаточно длину отрезка отождествить с величиной угла поворота и направить его вдоль оси поворота в сторону, откуда вращение видно против часовой стрелки.

Если мы совершаем последовательно несколько поворотов тела относительно различных осей, то каждый такой поворот может быть задан соответствующим направленным отрезком. Если эти направленные отрезки сложить по правилам векторной алгебры, то мы снова получим направленный отрезок. К сожалению, его нельзя интерпретировать как результат последовательных поворотов тела. Операция сложения таких геометрических отрезков не имеет геометрического смысла.

Точно так же как "короля делает свита", алгебраические операции превращают направленный отрезок в вектор. До тех пор, пока мы такие операции не ввели и не изучили их свойства, мы не можем, строго говоря, утверждать, что направленный отрезок является вектором.

Во-вторых, нельзя утверждать также, что вектор является геометрическим объектом. Направленный отрезок, несомненно, является геометрическим объектом, хотя и малоинтересным. Над геометрическими объектами нельзя выполнять алгебраические действия. Нельзя, скажем, сложить трапецию с пирамидой или умножить шар на квадрат. Вводя алгебраические операции над направленными отрезками, мы определяем новый математический объект, который не является больше объектом геометрическим. Направленный отрезок превращается при этом в условное изображение этого нового объекта. Между тем, нельзя недооценивать практическое значение этого образа. Он придает конкретный геометрический смысл алгебраическим преобразованиям. Видимо, правильнее считать, что вектор имеет двойственную природу – он одновременно является и алгебраическим и геометрическим объектом.

Если мы согласны с предыдущими рассуждениями, то мы должны и согласиться с тем, что определение вектора задача непростая, и к ней лучше подойти постепенно и осторожно, начиная издали, хотя бы с уточнения понятия направленного отрезка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (1)

Под направленным отрезком будем понимать определенным образом ориентированный в пространстве отрезок, один из концов которого называется началом, а второй его концом.

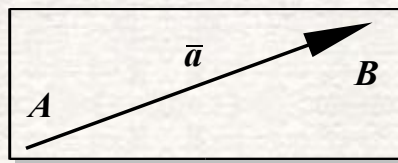


Рис. 1

ОБОЗНАЧЕНИЕ:

направленный отрезок будем обозначать буквой любого алфавита с чертой, например, $\vec{a}$. Если A начальная точка отрезка, а B конечная, то направленный отрезок можно обозначить как $\overrightarrow{AB}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (2)

Длина направленного отрезка называется его модулем.

ОБОЗНАЧЕНИЕ:

модуль вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$ или просто a , а модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (3)

Два направленных отрезка будем считать равными, если они могут быть совмещены при помощи параллельного переноса и при этом начало одного совпадает с началом другого.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (4)

Если отрезки могут быть совмещены при помощи параллельного переноса, но при этом начало одного совмещается с концом другого, то такие отрезки будем называть противоположными.

Другими словами, одинаковые направленные отрезки имеют одинаковые модули или длины, параллельны между собой и одинаково направлены. При этом они могут занимать различные положения в пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (5)

Направленный отрезок, начало и конец которого совпадают, называется нулевым направленным отрезком.

Нулевой направленный отрезок может быть назван отрезком лишь с большой натяжкой. Раз его начало и конец совпадают, то это скорее точка, а не отрезок. Да и направления никакого он не имеет. Однако, для полноты картины он весьма полезен, в чем мы убедимся в дальнейшем. Обозначается нулевой отрезок нулем с чертой — $\vec{0}$. Модуль нулевого отрезка естественно равен нулю — $\vec{0} = 0$.

Алгебраические операции над направленными отрезками

До сих пор мы стремились найти однозначное отображение в научном языке очевидных фактов из жизни направленных отрезков. Любая научная теория начинается с

этого. Любая теория начинается с научных фактов, которые должны быть ясно и однозначно сформулированы. Направленный отрезок – это относительно простой объект, и все что о нем можно было сказать, мы уже сказали. Теперь нам предстоит решить важную задачу – превратить хоть и направленный, но все еще простой, отрезок в вектор. Для этого необходимо ввести над направленными отрезками алгебраические операции.

Правила действий, которые мы собираемся ввести, не являются ни очевидными, ни произвольными. Свое обоснование они имеют в реальных свойствах физических величин, таких как сила, скорость и ускорение.

..Сложение направленных отрезков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (6)

Направленные отрезки складываются по правилу параллелограмма или, что одно и то же, по правилу треугольника. Несколько направленных отрезков можно складывать по правилу многоугольника (рис. 2).

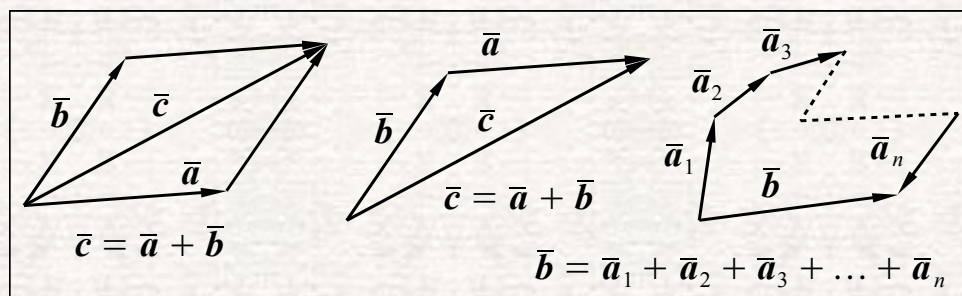


Рис. 2

Свойства операции сложения

1. Перестановочность (коммутативность)

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$$

2. Сочетательность (ассоциативность)

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{b} + (\bar{b} + \bar{c})$$

Свойства непосредственно следуют из определения.

..Умножение направленных отрезков на число

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (7)

Произведением направленного отрезка $\bar{a}$ на число λ является отрезок $\lambda \bar{a}$, модуль которого равен произведению модуля $\bar{a}$ на модуль λ , а направление совпадает с направлением отрезка $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно $\bar{a}$, если $\lambda < 0$. При $\lambda = 0$ или $\bar{a} = \bar{0}$ считаем, что $\lambda \bar{a} = \bar{0}$.

Из определения сразу вытекает, что $\bar{a} = 1 \cdot \bar{a}$.

Обратный или противоположный отрезок мы определили как отрезок равный по модулю, но противоположный данному. Если $\bar{a} = \overline{AB}$, то отрезок противоположный ему будет $\bar{b} = \overline{BA} = (-1) \overline{AB} = (-1) \bar{a} = -\bar{a}$. То есть отрезок противоположный отрезку $\bar{a}$ есть отрезок $-\bar{a}$. А по определению нулевого отрезка мы получаем $\bar{a} + (-\bar{a}) = \overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = \bar{0}$ (рис.3).

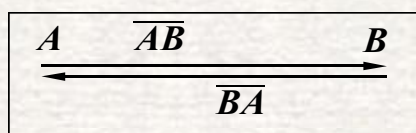


Рис.3

Между прочим, вполне обычные алгебраические свойства. Но в том то вся и прелесть, что для таких необычных объектов, как направленные отрезки, мы получили привычные и давно известные из повседневного опыта обращения с обычными числами алгебраические свойства. Следующие свойства также являются вполне очевидными.

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ

1. Сочетательность (ассоциативность)

$$\lambda_1(\lambda_2 \bar{a}) = (\lambda_1 \lambda_2) \bar{a}$$

2. Распределительность (дистрибутивность) относительно чисел

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \bar{a} = \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{a}$$

3. Распределительность (дистрибутивность) относительно направленных отрезков

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b}$$

Разобравшись с действиями, которые можно выполнять с направленными отрезками, мы готовы дать определение геометрического вектора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ВЕКТОРА (8)

Направленные отрезки, для которых определены операции сложения и умножения на число в соответствии с определениями 6 и 7, называются геометрическими векторами.

Наверное, стул, кресло, табуретку, пуфик и скамейку можно назвать одним общим словом седалище. (Вообще-то, в современном языке смысл этого слова другой, а в древности так называли место для сидения.) Если мы так поступим, то на вопрос – как представить седалище? На что оно похоже? – мы сможем только пожалть плечами. Каждый раз, переходя к более общим понятиям, мы теряем в образности представлений. Мы только что определили геометрический вектор. Физика дает нам другие многочисленные примеры векторов: вектор скорости, ускорения, силы, напряженности поля и т.д. Выделив в этих понятиях наиболее важное и общее и отвлекаясь от частного конкретного содержания, мы приходим к общему определению вектора. Но что есть общего между всеми этими примерами конкретных векторов? Все эти векторы имеют размер, направление и для них определены операции сложения и умножения на число. Оказывается, однако, что свойства связанные с размерами векторов, и свойства, вытекающие из их алгебраической природы, являются независимыми. Поэтому, все, что связано с размерами, математики предпочитают изучать отдельно, в так называемых метрических теориях. Алгебраические же свойства векторов становятся при этом предметом изучения теории линейных или векторных пространств. В результате, мы приходим к следующему определению вектора.

ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА (9)

Объекты любой природы, для которых определены операции сложения и умножения на число, и, которые в свою очередь обладают следующими свойствами:

$$1. \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a};$$

$$2. (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c});$$

$$3. \bar{a} + \bar{0} = \bar{a};$$

$$4. \bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0};$$

$$5. 1 \cdot \bar{a} = \bar{a};$$

$$6. (\lambda_1 \lambda_2) \bar{a} = \lambda_1 (\lambda_2 \bar{a});$$

$$7. \lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b};$$

$$8. (\lambda_1 + \lambda_2) \bar{a} = \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{a},$$

называются векторами.

В свете данного определения, векторами могут считаться многочлены $P_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, вектор-строки $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]$ и вектор-столбцы $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$.

Такая "всеядность" нового определения не может не сказаться на пищеварении и, при неумелом обращении, может грозить расстройством желудка. В дальнейшем мы будем оставаться в рамках геометрической теории векторов, однако, связь между векторами и матрицами, которую устанавливает общее определение, мы не будем упускать из вида.

Проекция вектора

Слово "проекция" происходит от латинского "*projectio*" – бросание вперед. Идея этого понятия возникла, видимо, при наблюдении теней, которые отбрасывают освещенные предметы (рис. 4).

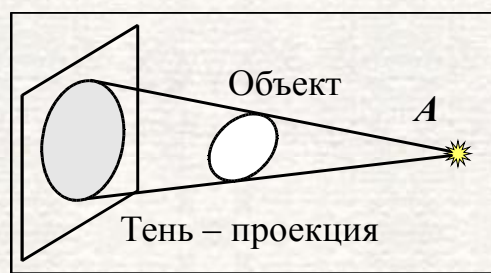


Рис. 4

Способ проекции, изображенный на рис. 4 называется центральной проекцией. Если источник света A отнести достаточно далеко, то мы получим параллельную проекцию. Параллельная проекция обладает рядом полезных качеств, в силу чего находит широкое применение в инженерной практике. Мы тоже в дальнейшем будем говорить только о параллельной проекции, опуская ее полное название.

Параллельное проектирование вектора в плоскости

Рассмотрим для начала наиболее простой, но тем не менее важный для понимания, частный случай – проектирование объектов целиком расположенных в плоскости на прямую, также расположенную в этой же плоскости. Направление проектирования зададим при помощи вектора $\vec{e}$.

На рис. 5 показаны проекции точки A , отрезка BC и вектора $\vec{a}$ на прямую L .

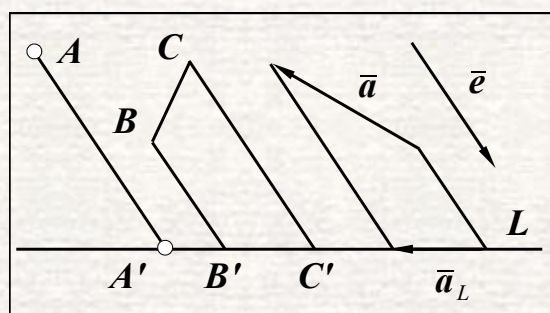


Рис. 5

Из рисунка видно, что проекцией точки A на прямую L является точка A' , проекцией отрезка BC является отрезок $B'A'$, а проекцией вектора $\vec{a}$ является вектор $\vec{a}_L$.

Параллельную проекцию вектора $\vec{a}$ на прямую L по направлению $\vec{e}$ будем обозначать $\overline{Pr}^{\vec{e}}_L \vec{a} = \vec{a}_L$.

Теперь дадим необходимые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ (10)

Пусть точка A , прямая L , и вектор $\vec{e}$ лежат в одной плоскости. Проекцией точки A на прямую L в направлении вектора $\vec{e}$ в этом случае будем называть точку A' , которая является результатом пересечения прямой L и прямой, проведенной через точку A в направлении вектора $\vec{e}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРА НА ПРЯМУЮ (11)

Пусть вектор $\vec{a} = \overline{AB}$, прямая L , и вектор $\vec{e}$ лежат в одной плоскости. Проекцией вектора $\vec{a}$ на прямую L в направлении вектора $\vec{e}$ в этом случае будем называть вектор $\vec{a}_L = \overline{Pr}^{\vec{e}}_L \vec{a}$, равный вектору $A'B'$. Точки A' и B' при этом являются проекциями начала и конца вектора $\vec{a} = \overline{AB}$ на прямую L .

Для векторов, лежащих на одной прямой, возможны лишь два направления: либо в одну, либо в другую сторону – третьего не дано. В этом случае само понятие вектора становится излишним, и можно вполне обойтись лишь алгебраическим значением – числом со знаком. Правда, для этого на прямой необходимо сначала задать одно из направлений в качестве положительного.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕННОЙ ОСИ (12)

Прямая, с заданным на ней положительным направлением, называется направленной осью или просто осью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ЗНАЧЕНИЯ ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРА НА НАПРАВЛЕННУЮ ОСЬ (13)

Алгебраическим значением проекции вектора на направленную ось называется модуль проекции вектора на эту ось, взятый со знаком "+", если направление проекции вектора совпадает с положительным направлением оси, и со знаком "-", в противном случае.

Обозначать алгебраическое значение проекции вектора на ось будем точно так же, как проекцию вектора на прямую, только без "векторной" черты сверху, например: $\vec{a}_L = \overline{Pr}^{\vec{e}}_L \vec{a}$.

Проекция вектора на ось – это вектор. Алгебраическое значение проекции вектора на ось – это число. Последнее название является исключительно громоздким, но пользуясь тем, что из контекста обычно всегда ясно, о чем идет речь – о числе или о векторе – и то и другое будем, в тех случаях, когда это не вызывает недоразумений, называть просто проекцией вектора.

ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИИ СУММЫ ВЕКТОРОВ НА ОСЬ

Проекция суммы векторов на ось равна сумме их проекций.

В данном случае из контекста теоремы неясно, о какого типа проекциях идет речь. Но к счастью, данная теорема справедлива и для векторной проекции и для алгебраической. А вот доказательства для этих случаев будут различные. Для начала докажем теорему для векторных проекций. Рассмотрим для определенности сумму четырех векторов (рис. 6).

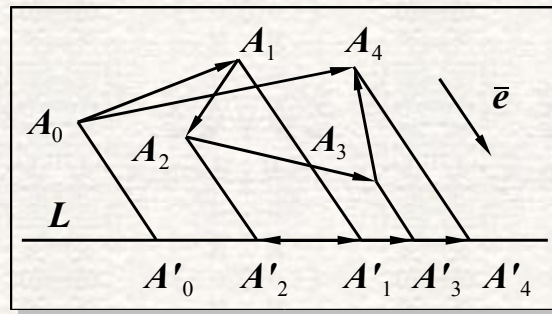


Рис. 6

Из рис. 6 видно, что:

$$\overline{A_0 A_4} = \overline{A_0 A_1} + \overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \overline{A_3 A_4},$$

$$\overline{A'_0 A'_4} = \overline{A'_0 A'_1} + \overline{A'_1 A'_2} + \overline{A'_2 A'_3} + \overline{A'_3 A'_4},$$

в соответствии с правилами сложения векторов.

С другой стороны:

$$\overline{A'_0 A'_4} = \overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \overline{A_0 A_4};$$

$$\overline{A'_0 A'_1} = \overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \overline{A_0 A_1};$$

$$\overline{A'_1 A'_2} = \overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \overline{A_1 A_2};$$

$$\overline{A'_2 A'_3} = \overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \overline{A_2 A_3};$$

$$\overline{A'_3 A'_4} = \overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \overline{A_3 A_4}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{A'_0 A'_4} &= \overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \overline{A_0 A_4} = \overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} (\overline{A_0 A_1} + \overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \overline{A_3 A_4}) = \\ &= \overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \overline{A_0 A_1} + \overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \overline{A_1 A_2} + \overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \overline{A_2 A_3} + \overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \overline{A_3 A_4}. \end{aligned}$$

Тот же самый результат может быть получен для любого количества векторов, что дает нам право записать теорему в общем виде:

$$\overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \sum_{i=1}^{i=n} \bar{a}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \bar{a}_i.$$

Теперь мы можем доказать теорему об алгебраических значениях проекций. Пусть $\bar{L}^0$ – единичный вектор, совпадающий с направлением оси $\bar{L}$. Такой вектор обычно называется ортом-вектором. Тогда векторную проекцию произвольного вектора $\bar{a}_i$ на ось $\bar{L}$ можно записать как: $\overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \bar{a}_i = s_i |\overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \bar{a}_i| \bar{L}^0$, где s означает знак.

Поскольку $\overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \sum_{i=1}^{i=n} \bar{a}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{\text{Pr}}_{\bar{L}}^{\bar{e}} \bar{a}_i$, то

$\overline{Pr}^{\bar{e}}_{\bar{L}} \sum_{i=1}^{i=n} \bar{a}_i = s \left| \overline{Pr}^{\bar{e}}_{\bar{L}} \sum_{i=1}^{i=n} \bar{a}_i \right| \bar{L}^0 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} s_i \left| \overline{Pr}^{\bar{e}}_{\bar{L}} \bar{a}_i \right| \right) \bar{L}^0$. Но модуль проекции вектора на ось, взятый с соответствующим знаком, – это и есть по определению алгебраическая величина проекции вектора на ось. Следовательно, $\overline{Pr}^{\bar{e}}_{\bar{L}} \sum_{i=1}^{i=n} \bar{a}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{Pr}^{\bar{e}}_{\bar{L}} \bar{a}_i$.

Запишем теперь обе формулировки доказанной нами теоремы в символической форме:

$$\overline{Pr}^{\bar{e}}_{\bar{L}} \sum_{i=1}^{i=n} \bar{a}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{Pr}^{\bar{e}}_{\bar{L}} \bar{a}_i; \quad (1)$$

$$Pr^{\bar{e}}_{\bar{L}} \sum_{i=1}^{i=n} \bar{a}_i = \sum_{i=1}^{i=n} Pr^{\bar{e}}_{\bar{L}} \bar{a}_i. \quad (2)$$

Как видим, и в символической записи эти две теоремы очень похожи, но разница, тем не менее, есть. В первом случае справа и слева от знака равенства стоят векторы, а во втором – числа.

Вообще то, эта теорема относится к той категории теорем, в которых *то, что требуется доказать, гораздо более очевидно, чем само доказательство*. Так или иначе, теорема полезная, и в дальнейшем она нам еще пригодится.

..Параллельное проектирование вектора в пространстве

Проекция точки на плоскость

Проецирование точки на плоскость производится способом аналогичным проецированию точки на прямую в плоскости. Проекцией A' точки A на плоскость α в направлении вектора $\bar{e}$ называется точка пересечения плоскости и прямой, проведенной через эту точку в направлении проецирования (рис. 7, а).

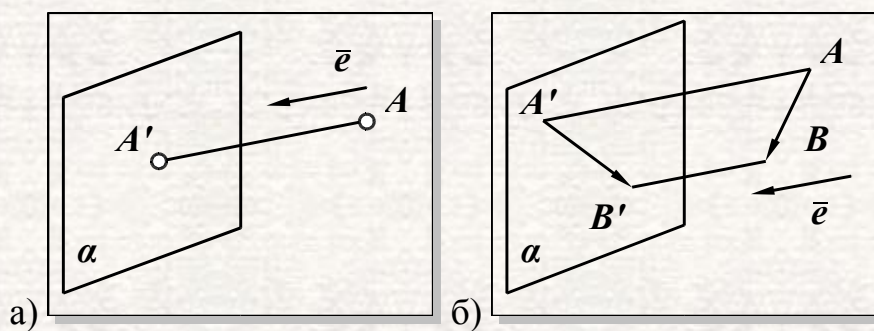


Рис. 7

Проекция вектора на плоскость

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на плоскость α называется вектор $\overline{A'B'}$ (рис. 7, б), где точки A' и B' являются проекциями точек A и B соответственно.

Проекция вектора на прямую

Спроектировать вектор на прямую в пространстве аналогично тому, как это можно сделать на плоскости, нельзя.

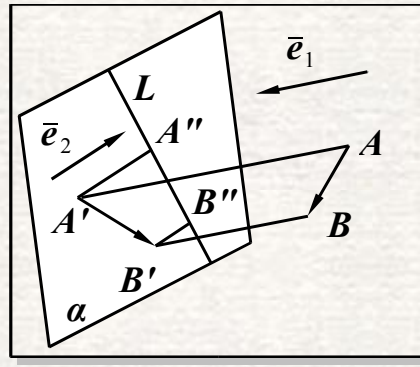


Рис. 8

Для начала спроектируем вектор $\overline{AB}$ по направлению $\bar{e}_1$ на некоторую плоскость, проходящую через прямую L . На рис. 8 эта плоскость обозначена α . Затем, полученную таким образом проекцию $\overline{A'B'}$, спроектируем по направлению $\bar{e}_2$ (вектор $\bar{e}_2$ лежит в плоскости α) на прямую L . В результате получим вектор $\overline{A''B''}$, который и принимают за проекцию вектора на прямую. Из построения очевидно, что проекция вектора не зависит от положения проецируемого вектора в пространстве. Проще говоря: равные векторы имеют и равные проекции. Если бы это было не так, мы не имели права говорить о проекции вектора вообще.

Вектор $\overline{A''B''}$ (проекция вектора $\overline{AB}$ на ось L) можно получить и более простым способом. В самом деле, точка A'' является точкой пересечения плоскости, проходящей через точки A , A' и A'' и прямой L . Плоскость же, проходящая через эти точки параллельна векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Назовем плоскость параллельную направлениям проецирования $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ проецирующей плоскостью.

Следовательно, можно дать следующее определение проекции вектора на прямую в пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (14)

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на прямую L по направлению проецирующей плоскости α называется вектор, $\overline{A'B'}$. Точки A' и B' при этом являются точками пересечения прямой L и плоскостей, проведенных через точки A и B параллельно проецирующей плоскости.

ОБОЗНАЧЕНИЕ

Для обозначения проекции вектора на прямую будем использовать следующее обозначение: $\overline{Pr}^{\alpha}_L \bar{a}$ или $\overline{Pr}^{e_1, e_2}_L \bar{a}$.

Проекция вектора на прямую – величина векторная. Совершенно аналогично тому, что мы имели на плоскости, и для пространственного случая мы можем ввести понятие алгебраического значения проекции вектора на направленную ось. Для обозначения алгебраического значения проекции мы будем (так же как и в "плоском" случае) использовать то же самое обозначение, только без "векторной" черты сверху: $Pr^{\alpha}_L \bar{a}$ или $Pr^{e_1, e_2}_L \bar{a}$. И, что очень приятно, теорема (1), которую мы доказали для "плоского" случая, справедлива и для обеих проекций в пространстве:

$$1. \overline{Pr}^{\alpha}_L \sum_{i=1}^{i=n} \bar{a}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{Pr}^{\alpha}_L \bar{a}_i; \quad (1^*)$$

$$2. Pr^{\alpha}_L \sum_{i=1}^{i=n} \bar{a}_i = \sum_{i=1}^{i=n} Pr^{\alpha}_L \bar{a}_i. \quad (2^*)$$

Доказательство полностью аналогично тому, что мы привели для случая на плоскости.

..Ортогональная проекция вектора в пространстве

Ортогональная проекция есть частный случай параллельной проекции и, поэтому для нее справедливы те общие результаты, которые мы уже получили. В то же время ортогональная проекция обладает рядом геометрических свойств, которые выгодно отличают ее от других видов проекции. Физика также имеет свой собственный интерес к этому виду проекции. Например, работа силового поля зависит именно от ортогональной проекции силы на направление перемещения. Можно, видимо, утверждать, что ортогональная проекция и, связанная с ней, ортогональная система координат, о которой мы будем говорить в дальнейшем, выделена самой природой.

Ортогональная проекция вектора на плоскость

Ортогональную проекцию мы получим, если вектор, задающий направление проектирования, ортогонален плоскости, на которую производится проектирование. Поскольку при ортогональном проектировании направление проектирования задается однозначно самой плоскостью, то в условном обозначении его можно опустить: $\overline{\text{Pr}}_{\alpha} \bar{a} = \overline{\text{Pr}}_{\alpha}^{\bar{e} \perp \alpha} \bar{a}$.

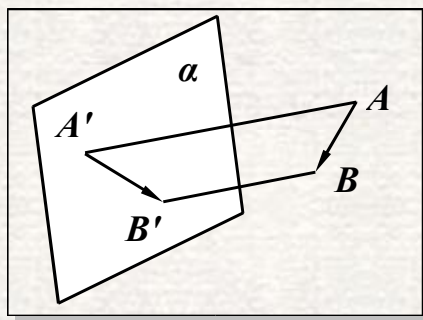


Рис. 9

Для получения ортогональной проекции вектора на плоскость достаточно из начала и конца вектора опустить на эту плоскость перпендикуляры. Основания этих перпендикуляров и определяют проекцию вектора на плоскость (рис. 9): $\overline{\text{Pr}}_{\alpha} \overline{AB} = \overline{\text{Pr}}_{\alpha}^{\bar{e} \perp \alpha} \overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Ортогональная проекция вектора на прямую и направленную ось

Для построения ортогональной проекции вектора $\overline{AB}$ на прямую L или ось $\bar{L}$ необходимо использовать проектирующую плоскость α ортогональную прямой, либо просто опустить на прямую L перпендикуляры (h_1, h_2) из начала и конца вектора $\overline{AB}$ (рис 10).

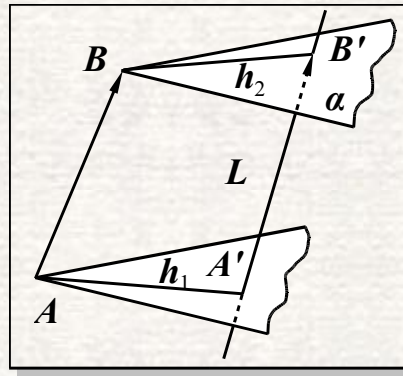


Рис. 10

В условных обозначениях это запишется так:

$\overline{Pr}_L \overline{AB} = \overline{Pr}_L^{\alpha \perp L} \overline{AB} = \overline{A'B'}$; и для алгебраической величины ортогональной проекции вектора на направленную ось – $\overline{Pr}_L \overline{AB} = \overline{Pr}_L^{\alpha \perp L} \overline{AB} = s|\overline{A'B'}|$, где s – знак плюс или минус.

Теперь придется сказать несколько слов об употреблении термина "проекция". Мы уже ввели несколько понятий, каждое из которых претендует на это название: проекция вектора на плоскость, "векторная" проекция вектора на прямую, алгебраическое значение проекции вектора на направленную ось, ортогональная проекция вектора на плоскость, "векторная" ортогональная проекция вектора на прямую и алгебраическое значение ортогональной проекции вектора на направленную ось. Наиболее длинным и неудобным по названию и одновременно наиболее часто используемым является последнее понятие. В силу этого название "проекция" в векторной алгебре закрепилось именно за алгебраическим значением ортогональной проекции вектора на направленную ось. В дальнейшем мы также не будем отступать от этой традиции, тем более что из контекста обычно всегда ясно, о чем идет речь.

Итак, проекцией вектора на направленную ось будем называть алгебраическое значение его ортогональной проекции на эту ось.

Мы не будем считать это определением проекции вектора на направленную ось, а лишь удобным соглашением о названии.

Свойства ортогональной проекции вектора на направленную ось.

1. Проекция суммы векторов равна сумме их проекций.

Для двух векторов:

$$\overline{Pr}_L(\overline{a} + \overline{b}) = \overline{Pr}_L \overline{a} + \overline{Pr}_L \overline{b};$$

и для любого их количества

$$\overline{Pr}_L \sum_{i=1}^{i=n} \overline{a}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{Pr}_L \overline{a}_i.$$

2. Проекция произведения вектора $\overline{a}$ на действительное число λ равна произведению числа λ на проекцию вектора $\overline{a}$.

$$\overline{Pr}_L \lambda \overline{a} = \lambda \overline{Pr}_L \overline{a}.$$

Если первые два свойства справедливы для всех типов проекций, и мы их сформулировали более для порядка, то следующее свойство является "визитной карточкой" ортогональной проекции.

3. Проекция вектора $\vec{a}$ на направленную ось $\vec{L}$ равна произведению его модуля на $\cos \varphi$, где угол φ – угол между вектором $\vec{a}$ и направленной осью $\vec{L}$ (рис. 11). Дадим этому свойству доказательство.

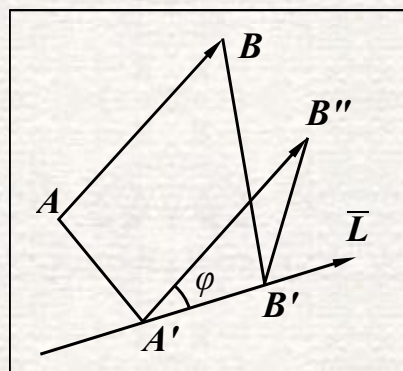


Рис. 11

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Спроектируем точки A и B (конечно, ортогонально) на прямую $\vec{L}$. Вектор $\overline{A'B'}$ есть проекция вектора $\overline{AB}$: $\overline{A'B'} = \text{Pr}_{\vec{L}} \overline{AB}$. Перенесем вектор $\overline{AB}$ параллельно самому себе так, чтобы точка A совпала с точкой A' . Минимальный угол между векторами $\overline{A'B''}$ и $\vec{L}$ принимается за угол φ между вектором и осью. Поскольку равные векторы имеют и равные проекции, то проекции векторов $\overline{AB}$ и $\overline{A'B''}$ одинаковы и равны $\overline{A'B'}$. Алгебраическая величина проекции вектора $\overline{A'B''}$, или просто проекция, в соответствии с соглашением о названиях, равна $\text{Pr}_{\vec{L}} \overline{A'B''} = s |\overline{A'B''}|$, где s означает знак "плюс" или "минус". А модуль вектора $\overline{A'B'}$, в свою очередь, равен произведению модуля вектора $\overline{A'B''}$ на $\cos \varphi$:

$$\text{Pr}_{\vec{L}} \overline{A'B''} = s |\overline{A'B''}| = |\overline{A'B'}| \cos \varphi.$$

Учитывая, что

$$|\overline{AB}| = |\overline{A'B''}| \text{ и}$$

$$\text{Pr}_{\vec{L}} \overline{AB} = \text{Pr}_{\vec{L}} \overline{A'B''}, \text{ получаем окончательно } \text{Pr}_{\vec{L}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi.$$