# .Метод координат

Метод, который мы начинаем изучать в этой главе, определяет наиболее сильную сторону векторной алгебры. Вот, что об этом говорит Петр Константинович Рашевский:

"... большую и часто ведущую роль в геометрии играет координатный метод. Здесь геометрические образы изучаются не непосредственно геометрически, а методами алгебры (аналитическая геометрия), а затем и анализа (дифференциальная геометрия). Огромная сила этого метода основана на то, что он применяет к геометрии сильный, хорошо развитый вычислительный аппарат алгебры и анализа. В результате удается ставить и решать вопросы, лишь малая часть которых укладывается в сравнительно узкие рамки прямых геометрических методов" [13, с. 103].

## ..Коллинеарные векторы

Определение (15)

Векторы называются коллинеарными, если они параллельны.

Если бы мы всегда имели дело с геометрическими векторами, то новое слово "коллинеарные" было бы излишним. Понятие о параллельных объектах слишком сильно связано с нашими геометрическими представлениями. Однако в математике слово "вектор" имеет более широкое значение, и применяется для таких векторов, про которые мы не можем сказать, что они параллельны.

Поскольку векторы, которые могут быть совмещены при помощи параллельного переноса, считаются равными, можно коллинеарные векторы рассматривать как лежащие на одной прямой.

Любые два вектора, лежащие на одной прямой, могут различаться длинами и могут иметь либо одинаковые, либо противоположные направления. Поэтому для любых двух коллинеарных векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ справедливо соотношение: $\bar{\boldsymbol{a}} = \alpha \bar{\boldsymbol{b}}$, где $\alpha$ – действительное число.

Определение (16)

Если один из векторов, не равный нулю, мы примем за меру и обозначим его $\boldsymbol{e}_1$, то все остальные векторы могут быть представлены в единообразной форме $\bar{\boldsymbol{a}} = a^1 \boldsymbol{e}_1$. Вектор $\boldsymbol{e}_1$ называется при этом базисным вектором, а $a^1$ – координатой вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ относительно данного базиса. Векторы базиса можно писать без "векторной" черты сверху. Нетрудно видеть, что $a^1 = s\dfrac{|\bar{\boldsymbol{a}}|}{|\boldsymbol{e}_1|}$. Можно также написать, что $a^1 = \dfrac{Пр_e \bar{\boldsymbol{a}}}{|\boldsymbol{e}_1|}$.

Конечно, для коллинеарных векторов все эти определения и обозначения являются излишними, и мы ввели их для того, чтобы использовать в более сложных и интересных случаях.

### ..Компланарные векторы

Определение (17)

Векторы называются компланарными, если они параллельны некоторой плоскости.

Поскольку свободные векторы можно переносить параллельно самим себе в пространстве, то можно считать, что все компланарные векторы лежат в одной плоскости.

Определение (18)

Любой вектор, параллельный прямой, можно выразить через базисный вектор на этой прямой $\bar{\boldsymbol{a}} = a^1 \boldsymbol{e}_1$, но если вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ на этой прямой не лежит, то этого сделать уже нельзя. Однако, если мы выберем на плоскости два базисных вектора $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, то любой другой вектор уже может быть выражен в виде линейной комбинации базисных векторов $\bar{\boldsymbol{a}} = a^1 \boldsymbol{e}_1 + a^2 \boldsymbol{e}_2$. При этом векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ называются базисом, а числа $a^1$ и $a^2$ координатами вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ в этом базисе.

В самом деле, спроектируем вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ на прямую, совпадающую с вектором $\boldsymbol{e}_1$, по направлению вектора $\boldsymbol{e}_2$ и на прямую, совпадающую с вектором $\boldsymbol{e}_2$, по направлению вектора $\boldsymbol{e}_1$ (рис. 12).

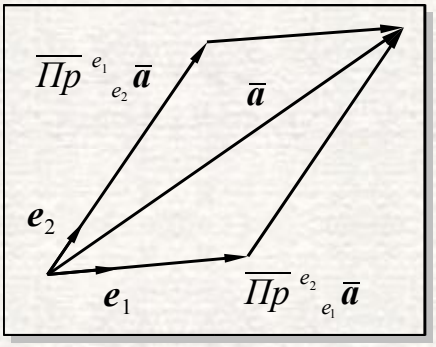


Рис. 12

Очевидно, что $\bar{\boldsymbol{a}} = \overline{Пр}^{e_2}_{e_1}\bar{\boldsymbol{a}} + \overline{Пр}^{e_1}_{e_2}\bar{\boldsymbol{a}}$. Поскольку каждую проекцию в свою очередь можно выразить через базисный вектор, то $\bar{\boldsymbol{a}} = a^1 \boldsymbol{e}_1 + a^2 \boldsymbol{e}_2$. Где,

$$a^1 = \frac{\overline{Пр}^{e_2}_{e_1}\bar{\boldsymbol{a}}}{|\boldsymbol{e}_1|}, \quad a^2 = \frac{\overline{Пр}^{e_1}_{e_2}\bar{\boldsymbol{a}}}{|\boldsymbol{e}_2|}. \qquad (3)$$

### ..Векторы в трехмерном геометрическом пространстве

Два вектора всегда являются компланарными так же, как три точки всегда лежат в одной плоскости. Но три вектора уже могут не быть компланарными, и тогда любой из них не может быть выражен через два других. Но, если мы выберем в пространстве три некомпланарных базисных вектора, то любой четвертый уже может быть выражен через них в виде линейной комбинации.

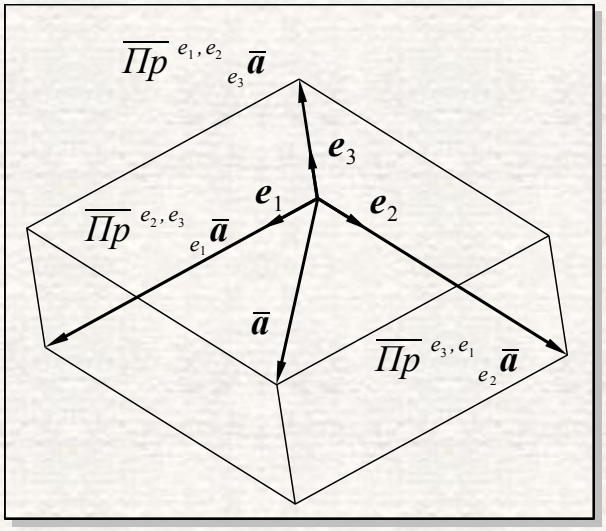


Рис. 13

Поступая аналогично тому, как мы это сделали для "плоского" случая, спроектируем вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ на базисные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ при помощи проектирующих плоскостей ( $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ ), ( $\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1$ ) и ( $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ ) (рис. 13). Выразив каждую из проекций через соответствующий вектор базиса, получим:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \overline{Пр}^{e_2,e_3}_{e_1}\bar{\boldsymbol{a}} + \overline{Пр}^{e_3,e_1}_{e_2}\bar{\boldsymbol{a}} + \overline{Пр}^{e_1,e_2}_{e_3}\bar{\boldsymbol{a}} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3 .$$

То же самое в сокращенной записи:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{i=3} a^i\boldsymbol{e}_i .$$

Соглашение Эйнштейна об обозначениях

Поскольку в векторной алгебре подобного рода суммы встречаются часто, то по предложению А. Эйнштейна принято знак суммы опускать. С учетом соглашения А. Эйнштейна, последнее равенство можно переписать в более компактном виде: $\bar{\boldsymbol{a}} = a^i\boldsymbol{e}_i$ .

Вот и все, надо только не забывать, что последняя запись является всего лишь сокращением предыдущей. Символ $i$ в последнем выражении можно заменить любым другим, и от этого ничего не изменится, поэтому его называют немым символом. Немой символ пробегает все возможные значения. В нашем случае – это 1, 2, 3. Интересно, что последнее выражение в сокращенной записи А. Эйнштейна выглядит совершенно одинаково для всех трех случаев, которые мы рассмотрели, если учесть, что для векторов на плоскости $i$ принимает значения 1 и 2, а для векторов на прямой единственное значение – 1.

Уточним понятие базиса. Прежде всего, базисные векторы – это такие векторы, через которые могут быть однозначно выражены остальные. Но таких векторов много, и, когда мы говорим о векторах базиса, предполагается, что какие-то векторы для этой цели мы уже выбрали. В трехмерном пространстве мы можем выбрать в качестве базиса любые три некомпланарных вектора.

## ..Линейная зависимость векторов и размерность пространства

Определение (19)

Векторы $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3, \ldots \bar{\boldsymbol{a}}_n$ называются линейно зависимыми, если можно подобрать не все равные нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, такие что выполняется равенство: $\alpha_1 \bar{\boldsymbol{a}}_1 + \alpha_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \alpha_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3 + \ldots \alpha_n \bar{\boldsymbol{a}}_n = \bar{\mathbf{0}}$.

С другой стороны, если таких чисел не существует, то векторы называются линейно независимыми.

Теперь мы можем доказать следующие утверждения:

1. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

В самом деле, пусть векторы $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3$ линейно зависимы. Тогда $\alpha_1 \bar{\boldsymbol{a}}_1 + \alpha_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \alpha_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3 = \bar{\mathbf{0}}$, и среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ есть не равные нулю. Пусть, для определенности, не равно нулю первое число $\alpha_1 \neq 0$. В этом случае мы имеем право записать: $\bar{\boldsymbol{a}}_1 = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1} \bar{\boldsymbol{a}}_3 = \beta_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \beta_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3$. Но это означает, что векторы $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3$ лежат в одной плоскости, если, конечно, их перенести к одному началу. Следовательно, векторы $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3$ компланарны.

С другой стороны, если векторы $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3$ компланарны, то можно считать, что они лежат в одной плоскости. Здесь возможны варианты, которые мы рассмотрим по отдельности.

Вариант 1.

Один из векторов $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3$ является нулевым вектором. Пусть, для определенности, это будет первый вектор. В этом случае мы можем записать: $1 \cdot \bar{\mathbf{0}} + 0 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_2 + 0 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_3 = \bar{\mathbf{0}}$.

Вариант 2.

Среди векторов $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3$ нет нулевых векторов, но есть коллинеарные. Пусть, для определенности, коллинеарными являются первые два вектора. Но в этом случае, первый вектор может быть выражен через второй: $\bar{\boldsymbol{a}}_1 = \alpha \bar{\boldsymbol{a}}_2$, и, следовательно, $1 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_1 - \alpha \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_2 + 0 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_3 = \bar{\mathbf{0}}$.

Вариант 3.

Среди векторов $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3$ нет нулевых векторов, и все векторы не являются попарно коллинеарными. В этом случае все векторы могут быть перенесены в одну плоскость, и любой из них может быть разложен по остальным как по векторам базиса. Следовательно, $\bar{\boldsymbol{a}}_1 = \alpha_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \alpha_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3$, и мы снова получаем, что: $1 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_1 - \alpha_2 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_2 - \alpha_3 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_3 = \bar{\mathbf{0}}$.

2. Любые четыре вектора в трехмерном пространстве всегда линейно зависимы.

Здесь также возможны два варианта.

Вариант 1.

Какие либо три вектора являются компланарными. Пусть, для определенности, этими векторами будут первые три. В этом случае мы можем подобрать не все равные нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ так, что $\alpha_1 \bar{\boldsymbol{a}}_1 + \alpha_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \alpha_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3 = \bar{\mathbf{0}}$. Но тогда $\alpha_1 \bar{\boldsymbol{a}}_1 + \alpha_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \alpha_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3 + 0 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_4 = \bar{\mathbf{0}}$

Вариант 2.

Любые три вектора не являются компланарными. В этом случае любой из четырех векторов может быть разложен по остальным трем как по базису $\bar{\boldsymbol{a}}_1 = \alpha_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \alpha_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3 + \alpha_4 \bar{\boldsymbol{a}}_4$, и мы можем записать, что $1 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_1 - \alpha_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 - \alpha_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3 - \alpha_4 \bar{\boldsymbol{a}}_4 = \bar{\mathbf{0}}$.

Следовательно, в обоих возможных случаях четыре вектора являются линейно зависимыми.

Резюмирую все эти результаты, можно сказать, что в трехмерном пространстве мы всегда можем выбрать три линейно независимых вектора. В то же время, любые четыре вектора являются линейно зависимыми.

Мы также показали, что в плоскости любые три вектора являются линейно зависимыми, в то же время в плоскости всегда можно найти два линейно независимых вектора, так как для этого достаточно, чтобы они не были коллинеарны.

Это дает нам основание дать следующее определение размерности пространства векторов.

Определение размерности пространства (20)

Наибольшее число линейно независимых векторов пространства называется его размерностью.

Размерность пространства совпадает с числом базисных векторов этого пространства. Поскольку любой вектор может быть разложен по векторам базиса, мы можем дать следующее определение координат вектора в произвольном базисе.

Определение координат вектора (21)

Коэффициенты $a^1$, $a^2$, $a^3$, ... $a^n$ в разложении вектора $\bar{\boldsymbol{a}} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3 + \ldots + a^n\boldsymbol{e}_n$ по базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ ... $\boldsymbol{e}_n$ называются координатами вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ в этом базисе.

Определения, приведенные в этом разделе, хороши тем, что они легко обобщаются на пространства любых размерностей. Но зачем это нужно? Ведь мы прекрасно знаем, что наше привычное и уютное пространство трехмерно. Можно еще говорить о двумерном пространстве векторов на плоскости или об одномерном – на прямой. Но поскольку больше трех не бывает, стоит ли городить весь этот огород?

Что представляет собой, к примеру, четырехмерное пространство? На этот вопрос любой физик-теоретик скажет, что наше пространство только приближенно можно считать трехмерным. Пространство не существует вне времени, а вместе со временем оно образует четырехмерное пространство-время. В более "продвинутых" теориях уже невозможно обойтись без одиннадцати-мерных пространств. Но даже если все эти теоретические абстракции душа не принимает, и мы ни за что не хотим покидать привычного трехмерного пространства, нам все равно не уйти от представления о многомерных пространствах. Ну, хорошо, наше пространство трехмерно, но почему оно трехмерно? Уже сама постановка этого вопроса предполагает необходимость говорить и размышлять о пространствах с большим числом измерений.

Есть и более прагматические причины для интереса к многомерным пространствам. Например, вектор-столбцы и вектор-строки – типичные объекты матричной алгебры – являются векторами в смысле нашего общего определения вектора (8).

Пусть, скажем,

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{e}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{e}}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

С этими формальными векторами мы можем обращаться, как с обычными векторами, например, разложить вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ по базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{bmatrix} = a^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a^1 \boldsymbol{e}_1 + a^2 \boldsymbol{e}_2 + a^3 \boldsymbol{e}_3 + a^4 \boldsymbol{e}_4 = a^i \boldsymbol{e}_i .$$

Такого рода формальные структуры с необходимостью возникают в различных областях знания и очень приятно, что не нужно каждый раз строить заново всю теорию.

## .Декартова система координат

Базис, состоящий из произвольной тройки некомпланарных векторов, принято называть произвольной косоугольной системой координат. Такая система неудобна для практических вычислений и не очень естественна. На практике никто не измеряет длину в метрах, ширину в дюймах, а высоту в лаптях. Если мы и пользуемся произвольной косоугольной системой координат, то эта мера вынужденная. Например, даже если мы свяжем с упругим телом какую-либо удобную для нас систему координат, то в процессе деформации упругого тела эта система, мягко говоря, покоробится. Есть проблемы, при изучении которых, мы принципиально не можем воспользоваться какой-либо специальной системой координат.

В тех случаях, когда обстоятельства позволяют, и задача этого требует, удобнее использовать некую специальную систему координат. Таких систем изобретено достаточно много: цилиндрическая, сферическая, полярная, эллиптическая и т.д. Очень часто оказывается удобна так называемая декартовая система координат.

Декартовой называется система, базисные векторы которой взаимно ортогональны, по модулю равны единице и образуют правую тройку. Обозначаются базисные векторы латинскими буквами, которые называются, в соответствии с традицией, по-французски: ***i*** – и, ***j*** – жи, ***k*** – ка (рис. 14).

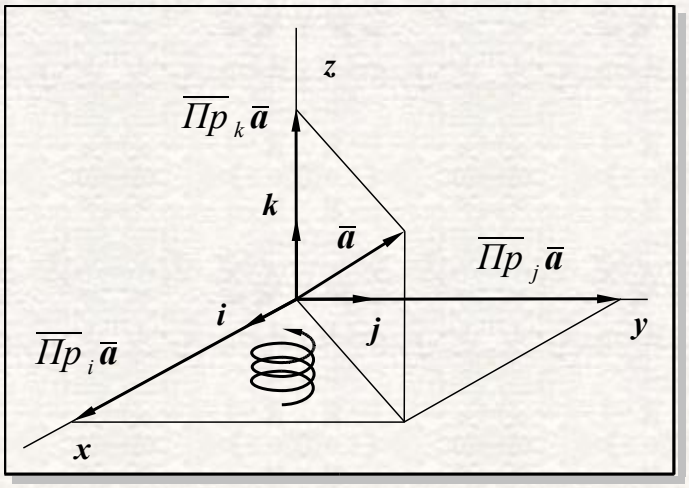


Рис. 14

Правил, позволяющих отличить правую тройку векторов от левой, имеется несколько. Из них наиболее часто используются четыре:

1. Правило левой руки.

Если кисть левой руки направить по направлению первого вектора и расположить ее так, чтобы второй вектор был направлен в ладонь, и если при этом большой палец левой руки будет направлен так же как третий вектор, то векторы образуют правую тройку векторов.

2. Правило правого винта.

Если первый вектор поворачивать по кратчайшему расстоянию в сторону второго, то третий вектор правой тройки векторов должен быть направлен в ту же сторону, в которую при таком вращении будет заворачиваться правый винт. Это правило на рис. 14 проиллюстрировано изображением спирали.

Остальные два правила не имеют названия.

3. Три вектора образуют правую тройку векторов, если при наблюдении из конца третьего вектора вращение первого по кратчайшему расстоянию в сторону второго происходит против часовой стрелки.

4. Если мы находимся внутри трехгранного угла, образованного тройкой векторов, и если при этом поворот от первого вектора ко второму, а затем к третьему должны выполнить против часовой стрелки, то векторы образуют правую тройку векторов.

Можно предложить и еще одно правило:

5. Векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ в указанном порядке образуют правую тройку векторов, если, будучи выстроенными в том же порядке друг за другом, они образуют правую спираль (рис. 15).

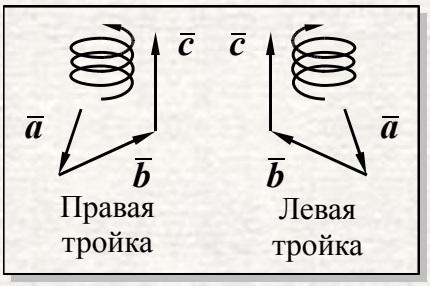


Рис. 15

Наличие большого количества правил говорит о том, что все они не очень удобны, и для того, чтобы научиться отличать правую тройку векторов от левой, требуется определенная тренировка.

Вектор $\boldsymbol{i}$ (и) обычно совмещают с осью $x$, вектор $\boldsymbol{j}$ (жи) – с осью $y$, а вектор $\boldsymbol{k}$ (ка) – с осью $z$.

Поскольку базисные векторы декартовой системы координат взаимно ортогональны, то координаты произвольного вектора в такой системе совпадают с его ортогональными проекциями.

Пример обозначения координат произвольного вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ (рис. 14).

$\bar{\boldsymbol{a}}_x = \overline{Пр}_i \bar{\boldsymbol{a}}$, $a_x = Пр_i \bar{\boldsymbol{a}}$;

$\bar{\boldsymbol{a}}_y = \overline{Пр}_j \bar{\boldsymbol{a}}$, $a_y = Пр_j \bar{\boldsymbol{a}}$;

$\bar{\boldsymbol{a}}_z = \overline{Пр}_k \bar{\boldsymbol{a}}$, $a_z = Пр_k \bar{\boldsymbol{a}}$.

Следовательно, в декартовой системе координат произвольный вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ может быть представлен в виде:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \overline{Пр}_i \bar{\boldsymbol{a}} + \overline{Пр}_j \bar{\boldsymbol{a}} + \overline{Пр}_k \bar{\boldsymbol{a}} = a_x i + a_y j + a_z k .$$

Модуль вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$, как видно из рис. 14, вычисляется как корень квадратный из суммы квадратов его координат: $|\bar{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Если обозначить углы между вектором $\bar{\boldsymbol{a}}$ и векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ соответственно $\varphi_x$, $\varphi_y$ и $\varphi_z$

, то разложение вектора по векторам базиса запишется так: $\bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{i}|\bar{\boldsymbol{a}}|\cos\varphi_x + \boldsymbol{j}|\bar{\boldsymbol{a}}|\cos\varphi_y + \boldsymbol{k}|\bar{\boldsymbol{a}}|\cos\varphi_z$ или $\bar{\boldsymbol{a}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|(\boldsymbol{i}\cos\varphi_x + \boldsymbol{j}\cos\varphi_y + \boldsymbol{k}\cos\varphi_z)$.

Вектор, совпадающий по направлению с вектором $\bar{\boldsymbol{a}}$ и имеющий единичную длину, называется направляющим вектором, или ортом-вектором, или просто ортом. Орт-вектор обозначается обычно с ноликом в правом верхнем углу: $\bar{\boldsymbol{a}}^0$ – орт-вектор вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$.

Так как

$\bar{\boldsymbol{a}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|(\boldsymbol{i}\cos\varphi_x + \boldsymbol{j}\cos\varphi_y + \boldsymbol{k}\cos\varphi_z)$ и $\bar{\boldsymbol{a}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|\bar{\boldsymbol{a}}^0$, то

$\bar{\boldsymbol{a}}^0 = (\boldsymbol{i}\cos\varphi_x + \boldsymbol{j}\cos\varphi_y + \boldsymbol{k}\cos\varphi_z)$.

Косинусы в последнем выражении, которые являются координатами орта-вектора, называются направляющими косинусами.

Вектор, проведенный из начала координат в некоторую точку *M*, называется радиусом-вектором этой точки. Координаты точки ($M_x$, $M_y$ и $M_z$) и координаты ее радиуса-вектора совпадают: $\bar{r}(M) = M_x\boldsymbol{i} + M_y\boldsymbol{j} + M_z\boldsymbol{k}$.

Если нам заданы в пространстве две точки $A\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ и $B\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$, то координаты вектора можно вычислить, воспользовавшись тем, что

$\overline{\boldsymbol{AB}} = \bar{\boldsymbol{r}}(B) - \bar{\boldsymbol{r}}(A)$ (рис. 16).

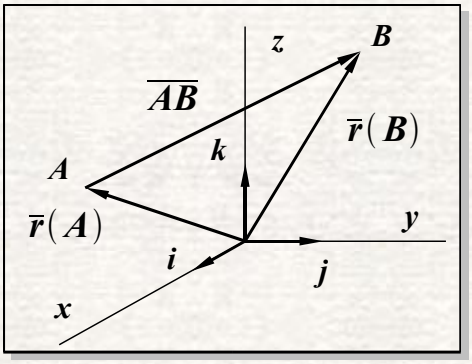


Рис. 16

Выразив координаты радиусов-векторов через координаты точек, мы получим:

$\overline{\boldsymbol{AB}} = \bar{\boldsymbol{r}}(B) - \bar{\boldsymbol{r}}(A) = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k} - a_x\boldsymbol{i} - a_y\boldsymbol{j} - a_z\boldsymbol{k} =$

$= (b_x - a_x)\boldsymbol{i} + (b_y - a_y)\boldsymbol{j} + (b_z - a_z)\boldsymbol{k}$.

Следовательно, координаты вектора, проведенного из точки в ***A*** точку ***B***, равны разности соответствующих координат этих точек.

**.. Различные формы записи векторов**

Принято различать координатную и векторную формы записи векторов. До сих пор мы пользовались только векторной формой записи. Но если мы выберем и зафиксируем в пространстве некоторую систему координат, то для задания любого вектора нам будет достаточно задать его координаты. Координаты, то есть три числа, взятые в определенном порядке, однозначно определяют вектор в выбранной системе координат. Поэтому можно записать: $\bar{\boldsymbol{a}} = \{a^1, a^2, a^3\}$. Слева в этом равенстве стоит вектор, следовательно,

под таблицей чисел, стоящей справа, необходимо понимать вектор с соответствующими координатами. Такая форма записи часто используется в векторной алгебре и называется координатной.

Таблицу $\{a^1, a^2, a^3\}$ можно записать по-разному, например так, как это принято в матричной алгебре: $\begin{bmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix}$ или $\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$.

Если под этими таблицами также понимать вектор с соответствующими координатами, то все эти таблицы представляют один и тот же вектор. Значит, мы имеем право записать:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \{a^1, a^2, a^3\} = \begin{bmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}.$$

Если рассматривать это равенство, как векторное, то его следует признать правильным. Однако, с точки зрения матричной алгебры, таблицы $\begin{bmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$ представляют собой различные матрицы, и между ними не может быть поставлен знак равенства. Можно было бы проигнорировать эту проблему, поскольку матричная алгебра является самостоятельной наукой и, если не смешивать матричную и векторную алгебры, то недоразумений не возникает. Кроме того, никто не заставляет использовать матричный формат записи координат векторов. Общепринятой является форма записи координат векторов в фигурных скобках, которая не используется в теории матриц. Выходит, что, если ограничиться только общепринятой формой, то проблем не возникает. Но дело все в том, что матричная и векторная алгебры близки и по духу, и по решаемым проблемам. Когда дело доходит до реальных вычислений с векторами, полезно использовать матричные методы и обозначения. Короче говоря, матричную и векторную алгебры полезно максимально интегрировать. Для того, чтобы при этом возникало меньше проблем, мы слегка модернизируем обозначения:

1. Обозначение точек $A\begin{bmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix}$, или $A\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$.

Точки будем обозначать большими буквами латинского алфавита. То, что обведено зеленоватым цветом, является необязательной частью обозначения. К необязательной части обозначения относится матрица с координатами точки.

Примеры: $A$, $A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2. Обозначение векторов

$$\bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix},\ \overline{\boldsymbol{AB}}\begin{bmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix},\ \overline{\boldsymbol{AB}}\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}.$$

Примеры: $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\overline{\boldsymbol{AB}}\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\end{bmatrix}$.

Кроме того, чтобы легче было переходить от векторов к матрицам и наоборот, введем знак "соответствия" " $\doteq$ " – знак "равно" с точкой наверху. Этим знаком мы будем объединять одинаковые по смыслу векторные и матричные выражения, например,

$$\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}} = \{4,5,6\} - \{1,2,3\} = \bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} - \bar{\boldsymbol{b}}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{c}}\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}.$$

Прочитать это выражение можно так: "Разнице векторов слева соответствует разность матриц справа".

Мы не будем давать точного определения для введенного нами знака "соответствия", рассматривая его в качестве "осторожного" знака равенства. Он должен напоминать, что хотя выражения, объединенные им, в известной степени, равны по смыслу, следует соблюдать осторожность при формальных преобразованиях.

### ..Линейные операции над векторами в координатной форме

Линейные операции над векторами можно выполнять как в векторной, так и в координатной формах, например:

1. Сложение векторов.

Векторная форма.

$$\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} + b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k} =$$
$$= (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k}.$$

Координатная форма.

$$\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix} + \bar{\boldsymbol{b}}\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{c}}\begin{bmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\\a_z+b_z\end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\\a_z+b_z\end{bmatrix}.$$

2. Умножение вектора на число.

Векторная форма.

$$\lambda\bar{\boldsymbol{a}} = \lambda(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k}.$$

Координатная форма.

$$\lambda\bar{\boldsymbol{a}} = \lambda\bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix}\lambda a_x\\\lambda a_y\\\lambda a_z\end{bmatrix} \doteq \lambda\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda a_x\\\lambda a_y\\\lambda a_z\end{bmatrix}.$$

### ..Скалярное умножение векторов

Впервые слово "скаляр" ввел в математику Виет, но современное значение ему придал Гамильтон (1843 г.), назвав скалярной величину отличную от векторной. Скалярная величина – это величина, которая может, в отличие от векторной, быть задана одним числовым значением. Проще говоря, скаляр – это число. По смыслу названия, при скалярном умножении векторов должно получаться число.

Определение скалярного произведения векторов (22)

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное умножение обычно обозначается точкой:

$\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|\cdot|\bar{\boldsymbol{b}}|\cos\varphi$ .

Введение такой странной, на первый взгляд, операции находит как физическое, так и геометрическое оправдание.

Если $\bar{\boldsymbol{F}}$ – постоянная сила, которая действует на точку, а $\bar{\Delta}$ – вектор перемещения этой точки, то работа $A$, которая совершается силой на этом перемещении, может быть вычислена как скалярное произведение силы на перемещение: $A = \bar{\boldsymbol{F}}\cdot\bar{\Delta}$ .

С геометрическими приложениями скалярного умножения мы познакомимся в дальнейшем.

Вспомнив, что $Пр_{\bar{a}}\bar{\boldsymbol{b}} = |\bar{\boldsymbol{b}}|\cos\varphi$ и $Пр_{\bar{b}}\bar{\boldsymbol{a}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|\cos\varphi$ , мы можем записать: $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|\,Пр_{\bar{a}}\bar{\boldsymbol{b}} = |\bar{\boldsymbol{b}}|\,Пр_{\bar{b}}\bar{\boldsymbol{a}}$ .

Свойства скалярного умножения

1. Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы взаимно ортогональны.

Пусть векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ не равны нулю. Тогда из равенства нулю скалярного произведения $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|\cdot|\bar{\boldsymbol{b}}|\cos\varphi = 0$ следует, что $\cos\varphi = 0$ , а это и означает, что $\bar{\boldsymbol{a}}\perp\bar{\boldsymbol{b}}$ .

Если же хотя бы один из векторов нулевой, то $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = 0$ . С другой стороны, для нулевого вектора понятие направления не имеет смысла. Но раз смысла нет, то любое соглашение не погрешит против правды. Мы можем принять, что нулевой вектор параллелен любому другому, если захотим, или, что он ортогонален к любому направлению, что мы и сделаем. Но если нулевой вектор ортогонален к любому другому, в том числе и нулевому же, то и этот случай не является исключением.

2. Скалярное умножение векторов коммутативно (перестановочно).

$\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{a}}$ – это сразу следует из определения.

3. Скалярное умножение ассоциативно по отношению к числовому множителю.

$\lambda(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}) = (\lambda\bar{\boldsymbol{b}})\cdot\bar{\boldsymbol{a}}$

так же непосредственно следует из определения.

4. Скалярное умножение дистрибутивно (распределительно) относительно сложения векторов.

$\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{b}} + \bar{\boldsymbol{c}}) = \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} + \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}}$ .

Данное свойство, несмотря на привычный вид, не является очевидным.

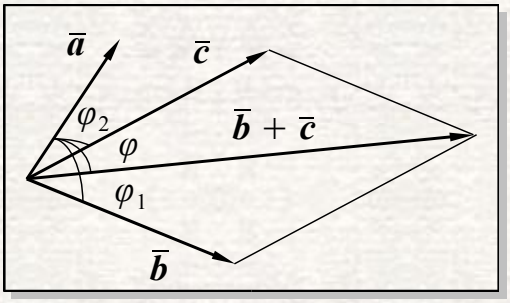


Рис. 17

В самом деле (рис. 17), $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{b}}+\bar{\boldsymbol{c}}) = |\bar{\boldsymbol{a}}|\cdot|\bar{\boldsymbol{b}}+\bar{\boldsymbol{c}}|\cos\varphi$,

а $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} + \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|\cdot|\bar{\boldsymbol{b}}|\cos\varphi_1 + |\bar{\boldsymbol{a}}|\cdot|\bar{\boldsymbol{c}}|\cos\varphi_2$. Глядя на рис. 17, трудно предположить, что эти два выражения равны, однако это так.

Доказательство

Для доказательства мы используем свойства проекций.

$$\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{b}}+\bar{\boldsymbol{c}}) = |\bar{\boldsymbol{a}}|\,Пр_{\bar{\boldsymbol{a}}}(\bar{\boldsymbol{b}}+\bar{\boldsymbol{c}}) = |\bar{\boldsymbol{a}}|(Пр_{\bar{\boldsymbol{a}}}\bar{\boldsymbol{b}} + Пр_{\bar{\boldsymbol{a}}}\bar{\boldsymbol{c}}) =$$
$$= |\bar{\boldsymbol{a}}|\,Пр_{\bar{\boldsymbol{a}}}\bar{\boldsymbol{b}} + |\bar{\boldsymbol{a}}|\,Пр_{\bar{\boldsymbol{a}}}\bar{\boldsymbol{c}} = \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} + \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}}.$$

Можно это свойство доказать и непосредственно вычисляя соответствующие длины и углы, но этот путь значительно дольше.

**С**калярное умножение в декартовых координатах

Общее выражение для скалярного произведения в произвольных координатах значительно сложнее, и мы займемся им позже.

Для начала найдем результат скалярного умножения базисных векторов декартовой системы координат.

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = |\boldsymbol{i}|\cdot|\boldsymbol{i}|\cos 0 = 1$ и аналогично $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1$.

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = |\boldsymbol{i}|\cdot|\boldsymbol{j}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$ и аналогично $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0$.

| • | $\boldsymbol{i}$ | $\boldsymbol{j}$ | $\boldsymbol{k}$ |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{i}$ | 1 | 0 | 0 |
| $\boldsymbol{j}$ | 0 | 1 | 0 |
| $\boldsymbol{k}$ | 0 | 0 | 1 |

Полученные результаты можно свести в таблицу скалярного умножения базисных векторов.

Теперь мы можем доказать следующее утверждение:

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их соответствующих координат: $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Доказательство

В самом деле,

$\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k})$. Воспользовавшись свойствами скалярного умножения и таблицей умножения для векторов базиса, мы получаем: $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

## ..Некоторые примеры использования скалярного умножения

Длина или модуль вектора в координатной форме

Пусть $\bar{\boldsymbol{a}}$ произвольный вектор. Скалярное произведение этого вектора самого на себя равно:

$$\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{a}} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

С другой стороны, $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{a}}^2 = |\bar{\boldsymbol{a}}|\cdot|\bar{\boldsymbol{a}}|\cos 0 = |\bar{\boldsymbol{a}}|^2$, следовательно,

$|\bar{\boldsymbol{a}}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ и $|\bar{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Расстояние между двумя точками

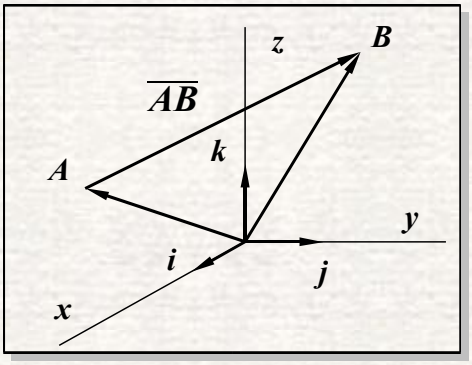


Рис. 18

Пусть нам даны две точки $A\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ и $B\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$, и требуется определить расстояние $l$ между ними. Проведем из начала координат в эти точки радиусы-векторы $\bar{\boldsymbol{r}}(A)$ и $\bar{\boldsymbol{r}}(B)$, тогда $\overline{\boldsymbol{AB}} = \bar{\boldsymbol{r}}(B) - \bar{\boldsymbol{r}}(A)$. Модуль или длина вектора $\overline{\boldsymbol{AB}}$ как раз и будет равна этому расстоянию. Следовательно,

$$l = |\overline{\boldsymbol{AB}}| = \left| \bar{\boldsymbol{r}}\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} - \bar{\boldsymbol{r}}\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \right| = \left| \bar{\boldsymbol{r}}\begin{bmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{bmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}\ .$$

Если расстояние между двумя точками мы обозначим $l_{AB}$, полученное выражение перепишется в виде:

$$l_{AB} = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}\ .$$

В качестве следующих примеров рассмотрим доказательство двух теорем элементарной геометрии. Этим мы убьем двух зайцев: во-первых, вспомним элементарную геометрию, во-вторых, получим удовольствие от эффективности метода.

Теорема

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

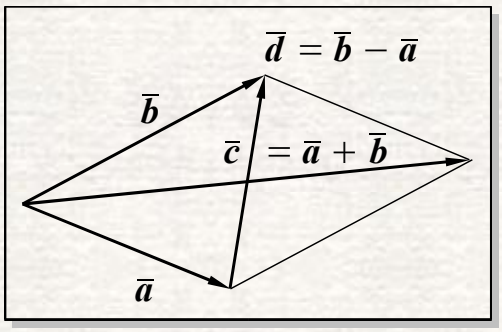


Рис. 19

Совместим векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ со сторонами параллелограмма (рис. 19), тогда сумма и разность этих векторов совпадут с его диагоналями.

$|\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}}|^2 = (\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}})^2 = (\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}})\cdot(\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}}) = \bar{\boldsymbol{a}}^2 + \bar{\boldsymbol{b}}^2 + 2\,\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}$ и соответственно

$|\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}}|^2 = (\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}})^2 = (\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}})\cdot(\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}}) = \bar{\boldsymbol{a}}^2 + \bar{\boldsymbol{b}}^2 - 2\,\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}$.

Сложив эти выражения, мы получим:

$|\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}}|^2 + |\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}}|^2 = 2\,\bar{\boldsymbol{a}}^2 + 2\,\bar{\boldsymbol{b}}^2 = 2|\bar{\boldsymbol{a}}|^2 + 2|\bar{\boldsymbol{b}}|^2$.

Мы видим, что левая часть равенства – это сумма квадратов диагоналей. Правая же часть, как и следовало ожидать – сумма квадратов сторон.

Теорема

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон за вычетом удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

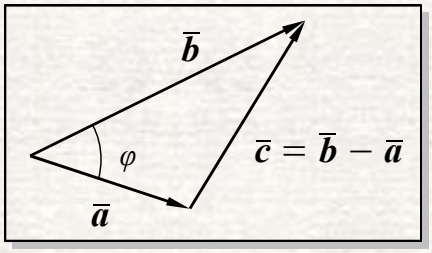


Рис. 20

Совместим векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ со сторонами треугольника (рис. 20), тогда вектор $\bar{\boldsymbol{b}} - \bar{\boldsymbol{a}}$ совпадет с третьей его стороной.

$|\bar{\boldsymbol{b}} - \bar{\boldsymbol{a}}|^2 = (\bar{\boldsymbol{b}} - \bar{\boldsymbol{a}})^2 = (\bar{\boldsymbol{b}} - \bar{\boldsymbol{a}})\cdot(\bar{\boldsymbol{b}} - \bar{\boldsymbol{a}}) = \bar{\boldsymbol{a}}^2 + \bar{\boldsymbol{b}}^2 - 2\,\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}$

И окончательно: $|\bar{\boldsymbol{b}} - \bar{\boldsymbol{a}}|^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\varphi$.

Напомним, что $a$ и $b$ означают модули соответствующих векторов.